良い関数やその高次元版で高次元の図形をみる調べるという幾何学の手法(タイトル若干変えさせて頂きました)

Naoki Kitazawa(北澤 直樹)

Postdoctoral researcher, Institute of Mathematics for Industry (IMI), Kyushu University
(九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 学術研究員)

はじめに

本日のファイルは講演者の HP

https://naokikitazawa.github.io/NaokiKitazawa.html

から飛べる

https://naokikitazawa.github.io/KenkyuNaokiKitazawaJapanese.html

にある

https://naokikitazawa.github.io/General20190926.pdf

をいくらか参考にしています．そして講演者は

基盤研究 (S)(17H06128: 代表者 佐伯 修) 「幾何的トポロジーと写像の特異点論の革新的研究」(https://kaken.nii.ac.jp/ja/grant/KAKENHI-PROJECT-17H06128/)

により雇用して頂いている研究員で今回も給与とは別に補助を受けております．

自己紹介 (1)

北澤 直樹 (きたざわ なおき)
1986/2/17 神奈川県横浜市で誕生 (33 歳：未婚)

2004/4 慶應義塾大学理工学部学門 2 入学
2008/3 同大学数理科学科数学専攻卒業 (幾何学系の研究室にて「多様体」や「リー群リー環」の基礎を習得)
2008/4 東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻修士課程入学
2010/3 同修了 (幾何学系の研究室にて「(ファイバー) 束：直積の一般化した空間」や可微分構造や可微分写像の特異点の理論を学びあまり思い出したくないが研究もどきをして修士論文を一応執筆)
2010/4 東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻博士課程入学
2014/3 同修了 (本日紹介するような内容の一部で修士論文と似たようなキーワードが出るような専門分野で博士論文を執筆)
2014/4/–2016/3 同じ大学でポスドク (補佐員や非常勤講師をしながら博士までのように学習や研究や関連活動を継続)

自己紹介 (2)

流行り出した数学の応用に興味を有し$\cdots$.

2016/4–2018/3 理系博士の多い民間企業に就職 (データ解析機械学習システムソフトウェア関係のプロジェクトに従事)
⇒ **この間も在野で数学の学習や研究や関連活動を継続 (珍しい ?)**.
2018/4–7 いろいろあり休職 (数学に関してはひそひそ継続)

ある意味生死の境をさまよった挙句 $\cdots$.

2018/9– 現職 (九州大学マス・フォア・インダストリ研究所学術研究員)
⇒初めて実家を離れ一人暮らし

幾何学–図形や空間の形とかを知る学問–

幾何学 (ジオメトリー)：図形や空間の形とかを知る学問.

- 測量に語源.
- ユークリッド (平面幾何: 紀元前), リーマン (多様体や相対性理論の幾何学: 19 世紀)　etc. 多くの学者の貢献で現代に至るまで発展.
- 物理学でも相対論におけるリーマン幾何にはじまりカラビ・ヤウ多様体等基本的で重要で熱い.
- 数学の応用ブームで「(空間内の) データ (セットの) 解析」等への応用も.


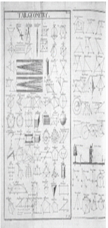

Figure 1: 左から, 平面幾何の父ユークリッド, 18 世紀の初等図形の図, 円錐曲線, カラビ・ヤウ多様体 (https://ja.wikipedia.org/wiki/幾何学よ

多様体とは

多様体：1 次元の直線や曲線, 2 次元の平面や曲面のように決まった成分数 (次元) の座標の入る空間.
正確には**局所的に決まった次元のユークリッド空間の開球と形 (位相) が同じハウスドルフ空間(で第二可算公理をみたすもの)**.

Example 1

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$, n 次元ユークリッド空間内の単位球面 S^{n-1}.

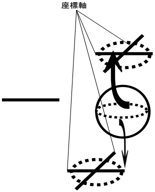

Figure 2: 基本的な多様体 (直線と 3 次元空間内の 2 次元の単位球面: 後者について上半球下半球は円板とみなせ自然な座標が入ることを矢印で表現したつもり).

多様体の歴史等

・ ベルンハルト・リーマン (1826–1866) による就職講演 (1854) で導入.
・ 幾何学で基本的な空間, 相対性理論他物理学への応用も盛んになり様々なの物理学の舞台.
・ 近年データ解析への応用 (例えば離散点集合であるデータセットから多様体を見出して射影する等) や他の応用.

Figure 3: ベルンハルト・リーマン：
https://gendai.ismedia.jp/articles/-/57468 より引用.

多様体に関する補足

○閉多様体: 有限の広がりをもち (つまりコンパクトで) ふち (境界) がない多様体.
・ 球面やその直積.

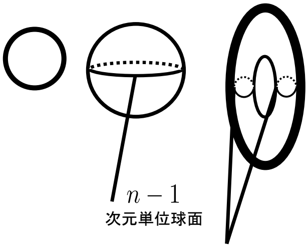

Figure 4: 基本的な閉多様体: 左から円周 (1 次元), $n \geq 2$ 次元単位球面 (n 次元：赤道が 1 次元低い単位球面), 円周の直積 (トーラス: 2 次元).

幾何学数学の基本的な問題
多様体の形 (位相) やより深い幾何的な情報を知ろう.

形(位相)

位相が同じ：つぶさずのばしたり縮めたりくらいではかわらない(つぶしても良いとホモトピー的に同じとなる).
正確には二つの空間の間の連続な全単射が存在するとき二つの空間は位相が同じ、同相であるという.

Example 2

ドーナツの表面とマグカップの表面は位相が同じ.

Figure 5: ドーナツとマグカップの表面–トーラスのよくある説明–

どちらも 2 次元トーラス.

不変量

○位相が同じなら変わらない量 (空間の不変量)

- ホモロジー群
- コホモロジー群 (環)

○ (広がりが有限な) 空間 X の i 次ホモロジー群 $H_i(X;\mathbb{Z})$: i 次元の穴を簡単な代数で表現する量.

・簡単なものは整数の集合の直和 $\mathbb{Z} \oplus \cdots \mathbb{Z}$ で表され一つの整数の集合 $\mathbb{Z}$ が大体一つの穴.

・コホモロジー環はより精密 (いわゆる双対性である程度ホモロジーと同じだが).

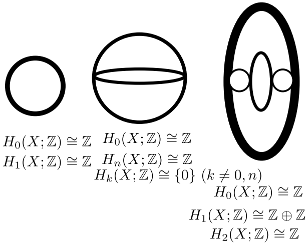

Figure 6: いくつかの多様体のホモロジー群.

形 (位相) に関する補足.–1 or 2 次元の閉多様体–

1 次元 (の連結つまりつながっている) 閉多様体：円周のみ
2 次元 (の連結つまりつながっている) 閉多様体：種数という※浮き輪の穴の数を表す非負の整数と向きが入るかで決まる (向きが入るといくつかの穴のあいた浮き輪).

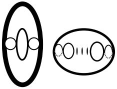

Figure 7: 2 次元で向きの入る種数 1 の閉多様体 (トーラス: 円周の直積) と種数 $g > 0$ のもの (g 個の穴の開いた浮き輪)

※向きがある場合 1 次のホモロジー群のための穴は 2 個。
向き: 表裏がある ↔ 向きが入る.
1 次元 → 必ず入る.　2 次元 → メビウスの帯が入っていなければ入る.

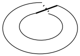

Figure 8: メビウスの帯

位相おまけ.–ポアンカレ予想–

20 世紀頭に提唱され最近解かれた多様体の位相に関する大問題.
基本群：ループを可換でないかもしれない群で代数的に表現したもの. 1 次ホモロジー群 H_1 より複雑で精密な不変量.

Fact 1 (Poincarés conjecture (1904), solved by Perelman (2006).)

基本群が自明な 3 次元の閉多様体は球面.

⇒ 4 次元以上では若干仮定を変えた主張があり先に証明.
⇒ 1 次元 2 次元は古典的, その後 5 次元以上のバージョンが自由度の高さから解かれ 4, 3 ときた.

Figure 9: Poincaré(1854–1912) と Perelman(1966–) そして Poincare 予想の 2 次元版を示す絵 (https://ja.wikipedia.org/wiki/ポアンカレ予想より)

より深い幾何的な構造 (可微分構造) と可微分関数–微積分へ–

◯可微分構造：座標のうち微 (積) 分の場を提供するようなもの
・ 前で上げたもの含め殆どのものには入る.
・ 1–3 次元では**一意的に必ず**入るが, 4 次元以上ではそうとは限らない.
◯可微分 (滑らかな)写像: 微分のできる写像.
・ たくさん存在.
◯特異点 $\leftrightarrow$ 可微分写像で微分の退化する点 (関数で高さの変化の仕方が変わる点：アブストラクトにも初歩的な二次関数の例がある).
◯正則値 $\leftrightarrow$ 逆像が特異点を含まないような値域の点. そうでないものが特異値.

簡単な可微分関数写像

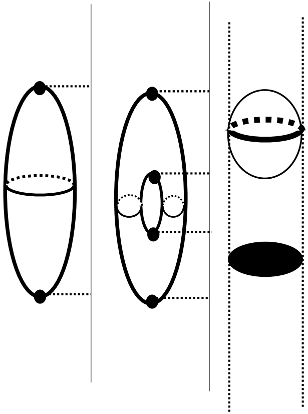

Figure 10: 適当に高さを考えて得られる可微分関数 (2 次元とは限らない 2 次元以上の単位球面のと 2 次元トーラスのもの: 黒い丸が特異点) そして単位球面 (2 次元以上) の平面への射影 (赤道上の太い線が特異点の集合で値域も次元が定義域以下の一般次元にできる: また最初の関数の高次元版でもある).

可微分構造の不思議–実は一通りかわからない–

可微分構造が同じ：**特異点を有さない**可微分写像で同相を与えるものが二つの可微分多様体の間に存在.

- ユークリッド空間は 4 次元以外は一意.
- 7 次元の (球面などの) 閉多様体の場合は, (向きを考えて) 可微分構造 28 通り.
  $\Rightarrow$ 1956 年の **Milnor** によるエキゾチック球面の発見にはじまる事実として有名.
- 8 次元以上の閉多様体の場合は有限通り, 5, 6 では 1 通り.
- 4 次元の場合は難 (ユークリッド空間は無限にあることなどは分かっているが球面等は全く分からない).
  $\Rightarrow$ 4 (3) 次元が**自由度の低さから変形などが難しい**ことから具体的に出てくる事実のひとつ.
  $\Rightarrow$ こういったこともあり **(可微分) 多様体の位相や可微分構造に関する研究といえるものはほとんど現在 4 次元以下特に 3–4.**
- **可微分構造が入らない多様体**も 4 次元以上では存在.

特別な可微分関数写像と多様体の位相や可微分構造

Fact 2

1. 特異点を丁度 2 個, 最大最小値を与える最も自然な特異点を有する可微分関数は, 球面を (大方) 位相的に特徴づける.
   ⇒ Morse 関数と呼ばれるものの中でもっとも簡単なもの.
   ⇒ 前の最初二つの高さ関数は Morse 関数.
2. Special generic 写像という, 前の特異点の高次元版といえるようなものしか特異点として有さない, **単位球面の射影を最も簡単な例とするようなクラスの**可微分写像は, しばしば定義域の多様体の位相や可微分構造を強く制限する.
   ⇒ (1990s–: 佐伯, 佐久間, Wrazidlo) 単位球面と可微分構造の異なる球面はしばしばこういう写像を許容しない.
   ⇒ **この写像の多様体の位相や可微分構造の観点からの面白さ.**

- 次元を一般化すること.
- 適切なクラスを考える (ここでは **special generic** 写像).

が多様体の位相や可微分構造の深い情報を知るうえで大事かも.

Morse 関数と特異点

Definition 1

各特異点 p で $0 \leq i(p) \leq m$ をみたす整数 $i(p)$ があり座標をうまくとると $(x_1, \cdots, x_m) \mapsto, \sum_{k=1}^{m-i(p)} {x_k}^2 - \sum_{k=m-i(p)+1}^{m} {x_k}^2 + f(p)$ と表せる可微分関数 f を <u>Morse</u> 関数とよぶ.

- 各特異点は離散的にあらわれる. 各特異点で値の異なる Morse 関数は可微分多様体に豊富に存在.
- $i(p)$ は一意に定まる (p の<u>指数</u> とよぶ).

Morse 関数の特異点と多様体のホモロジー群等

- 定義域が閉多様体の時 k 次のホモロジー群の階数つまり直和されている整数の集合の数は指数 k の特異点の個数以下.
  $\Rightarrow$ 階数と個数で完全に等式が成り立つものは, 円周や 2 次元の閉多様体や一般次元の基本的な閉多様体 (例えば単位球面の直積やそれに何らかの意味で位相的に近い空間) やその※ 1連結和 や 5 次元以上の単連結でホモロジー群が整数の集合の直和であるようなもの等には必ず存在.
- 各指数 k の特異点の個数と $(-1)^k$ を掛け合わせたものを足し合わせると多様体の※ 2オイラー数と呼ばれる不変量になる.

※ 1 二つの同じ次元の多様体からそれらと同じ次元の球体をくりぬいてふち同士を適切な方法で貼り合わせ新しい多様体を得る操作.
※ 2 オイラーの多面体定理"（頂点の数) − (辺の数) + (面の数)=2" の 2 は正多面体のみならず球面に位相が同じ空間のオイラー数. 要はこれの一般化.

折り目写像–Morse 関数の高次元版–

Definition 2

各特異点 p で $0 \leq i(p) \leq \frac{m-n+1}{2}$ をみたす整数 $i(p)$ があり座標をうまくとると
$(x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_1, \cdots, x_{n-1}, \sum_{k=n}^{m-i(p)} {x_k}^2 - \sum_{k=m-i(p)+1}^{m} {x_k}^2)$ と表せる, 閉可微分多様体から他の境界のない可微分多様体への可微分写像を折り目写像とよぶ.

$\Rightarrow$ 紙をたるませ平面へ射影するときたるみの部分に, 輪郭の部分にうつされる点として現れる特異点が折り目写像の最も簡単な特異点 (紙を折ったときに折り目として出現).

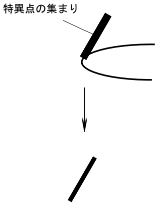

Figure 11: 2 次元多様体の折り目写像と特異点 (↓ は射影を意味).

折り目写像の基本的性質

- $i(p)$ は一意に決まる (p の指数と呼ぶ). 決まった指数の特異点全体の集合は定義域の中の可微分閉多様体 (閉部分多様体) で次元は $n-1$.
- 特異点の集合への制限は特異点のない可微分写像 (はめ込み).

Fact 3 (1950–60s Thom, Whitney and later Levine))

閉可微分多様体が平面への折り目写像を有する. ↔ 多様体のオイラー数が偶数.

折り目写像の存在については一般には難しい重要な問題.

- 3 次元以上のユークリッド空間への折り目写像の存在問題 (Eliashberg による 1970 年代の研究：最近も).
- ホモトピー原理, 微分方程式的な問題.
- **折り目写像の構成はもっと難しいことも (今回紹介する講演者の研究の眼目).**

Definition 3

special generic 写像：各特異点の指数が 0 である折り目写像.

具体的な折り目写像と定義域多様体

佐伯氏、佐久間氏などによる special generic 写像を許容する多様体の位相や可微分構造の研究 (1990s–).
$\Rightarrow$ Fact 2 の 2 は, 1 と違い高次元化して適当なクラスを考えると可微分構造など精密な情報が見えることを主張。

Theorem 1 (北澤, 2013–4)

可微分構造の入った 7 次元球面は, 向きをこめ 28 種類あるが, 4 次元ユークリッド空間への折り目写像で, 特異点の集合が 3 個の同心円状に埋め込まれた 3 次元の球面であり, 正則値の逆像が 3 次元球面の非交和であるようなものを許容する.
さらに, 特異点の集合の成分が 1, 2 個にしたものも考えられるが, 1 個のものを許容するのは単位球面のみ, 2 個のものは, (ある構造に関する条件をみたすものは) 28 種類中 16 種類の可微分構造が入ったもの (含単位球面) のみ許容する.

$\Rightarrow$ 写像の特異点の集合の像のトポロジーが可微分構造を制限することを special generic 写像とは別のクラスにて発見.

関数や写像の絵付き説明 (トーラス上の高さを与える関数と平面への special generic 写像)

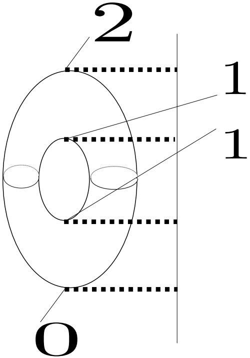

Figure 12: トーラスの上の自然な Morse 関数と特異点の指数 (対応してホモロジー群の階数は次数と同じ指数の特異点数と同じで 0 次が 1 で 1 次が 2 で 2 次が 1).

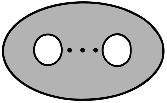

Figure 13: 平面への special generic 写像の像 (太線が埋め込まれた特異点の集合の像) : **単位球面と円周の直積または一般に直積のねじれたもの (いわゆる円周上の束) の全空間を連結和して得られる多様体が定**義域.

⇒ **可微分構造まで考慮し**単位球面から**直積やある程度複雑でない束や連結和を考えてできる**空間には special generic 写像が作りやすい.

関数や写像の絵付き説明 (Theorem 1)

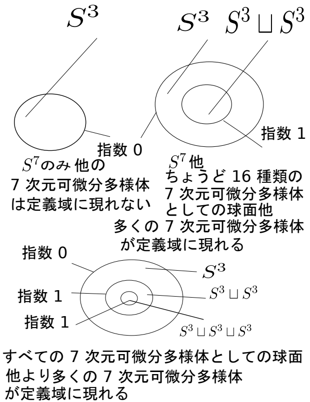

Figure 14: Theorem 1 の 7 次元閉多様体上の 4 次元空間への折り目写像の特異点の集合の像 (3 次元球面いくつかが同心円状に埋め込まれたもの) と正則値の逆像 (S^3 つまり 3 次元単位球面と可微分構造の同じものの非交和である)

補足

Fact 4 (1993 佐伯.)

Special generic 写像の像は, 値域と次元の同じはめ込まれた境界のあるコンパクトな多様体とみなせる.

Remark 1 (陰関数の定理の帰結)

可微分写像の正則値の逆像は定義域多様体の閉部分多様体.

⇒ 単位球面 (の非交和) が一番簡単なケース.
⇒ **Special generic** 写像含め扱ってきた写像は基本そう.

続講演者の結果

前の結果を通じ, 基本的な多様体上でも難しいとされる, 折り目写像の構成 (, そして結果として多様体を幾何的に表現すること) に, いくらか成功していることも大事.

問題：可微分写像を具体的にさらに構成せよそしてそれを通し (定義域に出てくる) 多様体を手に入れよ！

以下詳しい代数の用語は省略し曖昧ながら一つ結果.

Res 1 (北澤, 2015–2019.)

$m >> n$: 自然数.
$\{A_k\}_{k=0}^n$: 適切な有限生成可換群の有限列や有限生成な最大次数の元の次数が n の次数付き環で 0 次の部分が $\mathbb{Z}$ のもの
$\rightarrow \exists M$: $\{A_k\}_{k=0}^n$ から自然に定まるものを n 次までのホモロジー群やコホモロジー環とした, m 次元の連結な閉多様体.
$\exists f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$: 正則値の逆像が球面の非交和であるような折り目写像で *special generic* 写像またはそれから特異点集合の像を新たに特異点の集合が埋め込まれてできた成分として増やす形である**切って貼る手法**で得られるもの.

今後やりたいこととか–幾何学数学への応用–

写像の構成を通じあらゆる多様体を構成, 様々な多様体を幾何学的に入手 (?), 表現したい.

- 基本的であるが難しい. 特に一般次元の場合.
- 自由度が高くて (ポアンカレ予想含め) ある意味簡単で解決したとされる高 (一般) 次元の多様体に関する理論の手つかずの部分.
  ⇒ ホモトピー的な, ※**空間の「同相」より緩い**ある種の**連続的変形で保たれるような**量で大体決まる.
- 忘れられそうな部分もあるがそれでも重要であることに変わりはなくあらゆる可能性のあるこの古典を現在に蘇らせたい.

※例えば「点」と「円板」が最もかんたんな例だが, ホモトピー的に同じものは次元が同じでないということがよくある.

まずは Res 1 にあるように一般的に写像の具体的構成と多様体の入手を地道に頑張る.

今後やりたいこととか–幾何学と物理学–

例えば宇宙論や超弦理論で 5 次元以上の多様体は頻出する対象.

- 7 次元の単連結閉多様体のある対称性を有する Einstein 多様体の位相と可微分構造 (Kreck Stolz という幾何学系の有名研究者による 1980 年代の結果).
- 超弦理論の幾何 (我々の世界は 10 次元の中の 4 次元に過ぎない? : 6 次元が最初の方で少し触れた Calabi-Yau 多様体).
  $\Rightarrow$ 関連してきれいな構造を有する多様体の幾何的性質や構成の研究もあるようである (6 次元の
  ケーラー・アインシュタイン多様体や 5 次元の
  佐々木・アインシュタイン多様体等).
  $\Rightarrow$ 自然にこのモデルでは高次元空間から我々の生きる時空への写像ができている (どうやらあまり注目されていないかもしれないが今回の話の文脈だとこういう考えにたどり着く) ?

一般的に写像の具体的構成と多様体の入手を地道に頑張るが,
例えばここにあるような**具体的なクラスの多様体を具体的な可微分写像で表現（しようと頑張る）**というのは幾何学数学さらには物理学等で重要.

今後やりたいこととか–幾何学数学のデータ解析や機械学習への応用へ–

データセットは高次元空間内の点集合.
⇒ 射影次元削減が常套 (主成分分析など).

- 一連の図形の射影, 低次元空間への写像が応用できるのでは.
- 最近佐伯氏らが情報系工学系の研究者と 3 次元データの平面への写像による可視化に成功.
  ⇒ 特異値の逆像 (1 次元多様体が自己交差を有するような空間となる) 等を捉えた.
- 高次元のデータセットの可視化や良い表現に応用できないか.
  ⇒ Theorem 1 は 7 次元の球面とデータを紐づけると似ているけど違うデータセットの区別に使えるかもというコメント (2015 年に産学連携関係の研究集会で発表したときの企業の方からのコメント他).

データから自然に多様体を得る面白く有益な方法 (多様体学習等はあるが) や講演者の具体的な写像による表現を絡める方法は?

今後やりたいこととか–人間の知覚なんて領域にも–

不可能図形や錯視に関する応用系の研究集会「第 13 回錯覚ワークショップ (明治大学)」
の記録.

- 元は「**不可能図形**」の**線画による表現が高次元図形の射影とみなせる**から応用できないかと思って参加し講演 (佐伯氏らによれば関係ない話がないわけではないらしい).
- **「なぜ我々は低次元の (少ない) 情報から高次元の (入り組んだ) 情報を知覚できるのか ?」**などを明らかにするうえで使えるかもという哲学心理学系の研究者からのコメントがあった.

真面目な考察や研究にはまだ時間がかかりそう (だが一つの意外な側面として大事にし応用への夢だけはというところ).

最後に–一般次元可微分多様体と低次元空間への可微分写像の研究へ抱くもの (?)–

高次元特に高次元の可微分多様体の幾何学的側面の系統的研究は複雑さから難しく, それゆえ **20** 世紀半ばの古典的な自由度の高さに任せたきれいだが緩い分類の研究はあるがなかなか研究されず殆ど自分の周辺にしか研究者がいないほどマイナーでニッチな分野.

が幾何学数学としても基本的で重要, ビッグデータやそういったものが絡む機械学習や諸自然科学さらには人間の知覚まで可能性がある.

⇒ (今回触れていないし専門外で畏れ多いが) 複素の世界や代数的な (多項式) 関数と相性の良い多様体. (複素多様体や代数多様体) のようなよりきれいな多様体でも高次元は難しく重要として活発に研究されている (?).

⇒ 可微分多様体という, これらきれいな多様体たちからみれば複雑な多様体の写像や幾何学的性質に関する謎の解明と可能性にトライしたい. 今回のように具体的な折り目写像良い可微分写像をうまく扱うことで.

ありがとうございました！